償還請求権付き優先株の評価

The Pricing of Redemptible Preferred Stock

東洋大学経営力創成研究センター　研究員　董　晶輝

要旨

優先株には、普通株への転換権が付与される場合が多い。この論文では、普通株への転換権に加え、発行者（企業）に優先株の買い取りを請求できる権利が付く優先株式について議論する。優先株主はいつでも優先株を普通株に転換する権利を行使することができ、いつでも発行者に対して、優先株の買い戻しを請求できる場合を考え、優先株の評価モデルを構築する。ここでは、原資産の価格過程が普通株の株価と企業価値であるときについて、優先株式の評価式を導出する。最後に、数値例を示す。

キーワード(Keywords)： 優先株式(preferred stock)、普通株式への転換権(conversion rights)、償還請求権(redemption rights)、跳躍拡散過程(jump-diffusion processes)、2重指数分布(double exponential distribution)

Abstract

In this paper, we develop a model to value preferred stocks. Usually, preferred stocks have right to convert it to common stocks. Here we consider preferred stocks that except for the conversion rights, the holders of preferred stock have right to demand for repurchase it by the issuer at a particular price, that is so called the redemption rights. We show an explicit solution for optimal exercise price and the value of preferred stock with underlying asset of common stock or the value of the firm. Finally, we give some numerical examples.

はじめに

企業は資金調達の手段として、普通株式を発行するほかに、優先株式を発行する場合もある。優先株式には、優先的な権利が付いていることから、普通株より高く評価される。そのため、企業が同様に1株を発行するには、優先株の方がより多くの資金を調達することができる。優先株には、普通株への転換権が付与される場合が多い。企業の業績が好転し、株価が上昇する場合、優先株主が優先株を普通株に転換することで、利益が得られるので、優先株主にとって有利である。逆に、企業の業績が悪化し、破産するような状況になると、優先株主は損害を被る可能性がある。企業の業績が悪化する可能性が場合、優先株を企業に買い取ってもらう権利があれば、優先株の価値がさらに高まる。ここでは、普通株への転換権に加え、優先株主が発行者（企業）に優先株の買い取りを請求する権利が

付く優先株式について議論し、優先株の評価モデルを提示する。転換権あるいは買取請求権が発行時に決められた条件で強制的に行使させるような優先株の発行条件も考えられる[(1)]。強制的権利行使条件は優先株の価値を毀損することになる。ここでは、優先株主がいつでも転換権あるいは買取請求権を行使することができる場合について考える。優先株主は優先株の価値が最大になるように転換権あるいは買取請求権を行使する。優先株式の価値は原資産の価格過程のもとでの状態請求権の価値となる。原資産の価格過程については、株価と企業価値の2つを考える。前者を株価モデルと呼び、後者を企業価値モデルと呼ぶことにする。原資産価格の確率過程についてはブラウン運動とジャンプを含むある種の跳躍拡散過程(jump-diffusion processes)でモデル化する。ジャンプの確率分布については、Kou and Wang（2003）、Kou and Wang（2004）、Mordecki(2002)に従い、2重指数分布（double exponential distribution）の場合について議論している。これらの研究では、跳躍拡散過程での永久アメリカン・オプションの権利行使の閾値とオプション価格を求めているが、ここでは、転換権と買取請求権の権利行使の閾値を同時に求めることになる。このため、閾値とオプション価格を求めるための条件式は複雑になり、連立方程式を解くことになる。

論文は次のように構成される。第1節では、確率過程について説明し、それ伴う基礎的な結果を示す。第2節では、まず、株価モデルでの権利行使閾値と優先株の評価式を導出する。続けて、企業価値モデルにおいて権利行使の閾値を求め、優先株の評価式を導出する。第3節では、数値例を示す。第4節では、結論について述べる。条件式の導出については附録に記述する。

1. 原資産の確率過程

株価あるいは企業価値を表す確率変数 W_t は幾何ブラウン運動にジャンプを加えた跳躍拡散過程に従うものとする。ジャンプは上方と下方のジャンプの2種類で、それぞれ相互に独立のポアソン過程で発生する。上方へのジャンプが起きると、確率変数は $W_t = Y_1 W_{t-} (Y_1 > 1)$ になり、下方へのジャンプが起きると、確率変数は $W_t = Y_2 W_{t-} (0 < Y_2 < 1)$ になる。Y_i は確率変数であり、$\log Y_1$ と $-\log Y_2$ の確率分布は

$$f_i(y) = \eta_i e^{-\eta_i y}, \qquad i = 1, 2$$

の指数分布に従うとする。それぞれのパラメータは $\eta_1 > 1, \eta_2 > 0$ である。ポアソン過程のパラメータをそれぞれ λ_1 と λ_2 で表す。確率変数 W_t はレヴィ過程に属するもので、レヴィ過程の特質から、$E\left[W_t^z \mid W_0 = 1 \right] = \exp\left[\Psi(z) t \right]$ となる $\Psi(z)$ が存在する[(2)]。ここでは、

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\sigma^2 z(z-1) + \mu z + \lambda_1 \left[\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 - z} \right) - 1 \right] + \lambda_2 \left[\left(\frac{\eta_2}{\eta_2 + z} \right) - 1 \right]$$

である[(3)]。方程式 $\Psi(z) = r$ は4つの根をもつので、それらを、$\alpha_1 > \eta_1 > \alpha_2 > 0 > \alpha_3 > -\eta_2 > \alpha_4$ とする。

優先株に対しては、微小保有期間 dt につき定額 bdt の配当が連続的に支払われるものと

する。したがって、確率変数 W_t を原資産とする優先株式の価値 $V(w)$ は微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 w^2 V''(w) + \mu w V'(w) + \lambda_1 E\left[V(Y_1 w) - V(w)\right] + \lambda_2 E\left[V(Y_2 w) - V(w)\right] - rV(w) + b = 0 \qquad (1)$$

を満たすことになる。

2. 評価モデル

2.1 株価モデル

普通株の配当利回り c と無リスク金利 r を一定とする。普通株の価格過程はリスク中立条件を満たすためには、$\Psi(1) + c = r$ でなければならない。株価を p_t で表し、優先株の普通株への転換時の株価を p_1，買取請求時の株価を p_2 とし、株価が p ときの優先株式の価格を

$$V(p) = \begin{cases} p & p \geq p_1 \\ \sum_{i=1}^{4} A_i p^{\alpha_i} + \dfrac{b}{r} & p_1 \geq p \geq p_2 \\ k & p_2 \geq p \end{cases}$$

とすると、(1) 式から条件式

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\eta_1}{\eta_1 - \alpha_i} A_i {p_1}^{\alpha_i} + \frac{b}{r} - \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} p_1 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\eta_2}{\eta_2 + \alpha_i} A_i {p_2}^{\alpha_i} + \frac{b}{r} - k = 0$$

が得られる[4]（以下では合計範囲のインデックスを省略する)。これに価値対等条件を加えると、

$$\sum A_i {p_1}^{\alpha_i} = p_1 - \frac{b}{r}, \qquad \sum A_i {p_2}^{\alpha_i} = k - \frac{b}{r},$$

$$\sum \frac{\eta_1}{\eta_1 - \alpha_i} A_i {p_1}^{\alpha_i} = \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} p_1 - \frac{b}{r}, \qquad \sum \frac{\eta_2}{\eta_2 + \alpha_i} A_i {p_2}^{\alpha_i} = k - \frac{b}{r}$$

となる。最適化条件は

$$\sum \alpha_i A_i {p_1}^{\alpha_i} = p_1, \quad \sum \alpha_i A_i {p_2}^{\alpha_i} \geq 0, \quad p_2 \geq 0$$

である。

2.2　企業価値モデル

企業価値が普通株式価値と優先株式価値からなる企業を考える。普通株と優先株の株式数を n_1 と n_2 とし、優先株の比率を $a = n_2/(n_1+n_2)$ とする。以下では、総株式数 n_1+n_2 は1とし、優先株式数を a とする。企業業価値を X_t で表す。優先株の普通株への転換のときの企業価値を x_1 とし、企業に優先株の買取を請求する際の企業価値を x_2 とする。企業価値 X_t が x のときの普通株と優先株への配当総額を cx とし、優先株への配当は ab となるから、普通株への配当総額は $cx-ab$ である。企業価値の価格過程はリスク中立条件を満たすためには、$\Psi(1)+c=r$ でなければならない[(5)]。企業価値 X_t が x のときの優先株の総価値を

$$V(x)=\begin{cases} ax & x \geq x_1 \\ \sum A_i x^{\alpha_i} + \dfrac{ab}{r} & x_1 \geq x \geq x_2 \\ ak & x_2 \geq x \geq ak \\ x & ak \geq x \end{cases}$$

とすると、(1)式から条件式

$$\sum \frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i} A_i x_1^{\alpha_i} + \frac{ab}{r} - \frac{\eta_1}{\eta_1-1} a x_1 = 0 \tag{2}$$

$$\left(\sum \frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i} A_i x_2^{\alpha_i} + \frac{ab}{r} - ak \right) x_2^{\eta_2} = \left(ak - \frac{\eta_2}{\eta_2+1} ak \right) (ak)^{\eta_2} = 0 \tag{3}$$

が得られる[(6)]。これに価値対等条件を加えると

$$\sum A_i x_1^{\alpha_i} = a\left(x_1 - \frac{b}{r} \right),$$

$$\sum A_i x_2^{\alpha_i} = a\left(k - \frac{b}{r} \right),$$

$$\sum \frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i} A_i x_1^{\alpha_i} = a\left(\frac{\eta_1}{\eta_1-1} x_1 - \frac{b}{r} \right),$$

$$\sum \frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i} A_i x_2^{\alpha_i} = a\left(k - \frac{b}{r} \right) - \frac{ak}{\eta_2+1_1} \left(\frac{ak}{x_2} \right)^{\eta_2}$$

となる。これらの条件式の右辺の a を1とし、最後の条件式の右辺の第2項を削除すると株価モデルでの条件式と等しくなる。

最適化条件は

$$\sum \alpha_i A_i x_1^{\alpha_i} = a x_1, \qquad \sum \alpha_i A_i x_2^{\alpha_i} \geq 0, \qquad x_2 \geq ak$$

である。

3. 数値例

この節では数値例を用いて、普通株への転換権を行使する閾値と買取請求権を行使する閾値および優先株の価値を求めてみる。使用するデータの基準値とそれに対応する幾何ブラウン運動（GB）および2重指数分布過程（DE）のパラメータ値を表1で示す。$\left(\Psi(2)-2\Psi(1)\right)dt$ は原資産価格の微小時間 dt での変化率の分散であり、μ はリスク中立条件 $\Psi(1)+c=r$ が成立するように決められた値である。表1の下段は幾何ブラウン運動（GB）および2重指数分布過程（DE）での方程式 $\Psi(1)-r=0$ の根を示している。

表1　基準値とパラメータ値

基準値		パラメータ値		
			GB	DE
$\Psi(2)-2\Psi(1)$	0.1	σ^2	0.1	0.0596
c	0.02	μ	0	0
r	0.02	r	0.02	0.02
λ_1	1	λ_1	---	1
λ_2	1	λ_2	---	1
$E\left[Y_1\right]$	1.1	η_1	---	11
$E\left[Y_2\right]$	0.9	η_2	---	9
b	1	b	1	1
k	100	k	100	100
a	0.1	a	0.1	0.1
		α_1	---	13.9371
		α_2	1.3062	1.3071
		α_3	−0.3062	−0.3055
		α_4	---	−11.9388

表2は基準値のもとで、株価モデルと企業価値モデルでの優先株の普通株への転換と買取請求を行う際の閾値を示している。株価モデルと企業価値モデルでの普通株への転換の閾値は一致しているが、買取請求の閾値は企業モデルが少し高くなっている。これは企業価値モデルでは、企業価値が ak よりも小さいときに、優先株の価値も ak よりも小さくなるからである。比較するため、確率過程が幾何ブラウン運動である場合の閾値も示した。この場合、株価モデルと企業価値モデルでの閾値は一致する。これは確率過程を幾何ブラウン運動と仮定すると、確率変数の値が閾値を飛び越すことはなく、企業価値モデルにお

いて企業価値が $ak(\leq x_2)$ より小のときの影響が出ないことによるものである。また、ジャンプのある場合と比べると、普通株への転換の閾値は高く、買取請求の閾値は若干低くなっている。

表2　権利行使の閾値

		x_1	x_2
企業価値モデル	GB	321.92	26.07
	DE	305.95	26.73
株価モデル	GB	312.92	26.07
	DE	305.95	26.72

図1は株式モデルでの優先株の価格を示している。グラフの横軸は普通株の株価を表し、縦軸はそれに対応する優先株の価格を示す。図2は企業価値モデルでの優先株の総価値を示している。グラフの横軸は企業価値を表し、縦軸はそれに対応する優先株総価値を示す。企業価値モデルでは、企業価値が優先株の買い取り総額を下回ると、普通株の価値がゼロになり、優先株の総価値が企業価値と等しくなる。

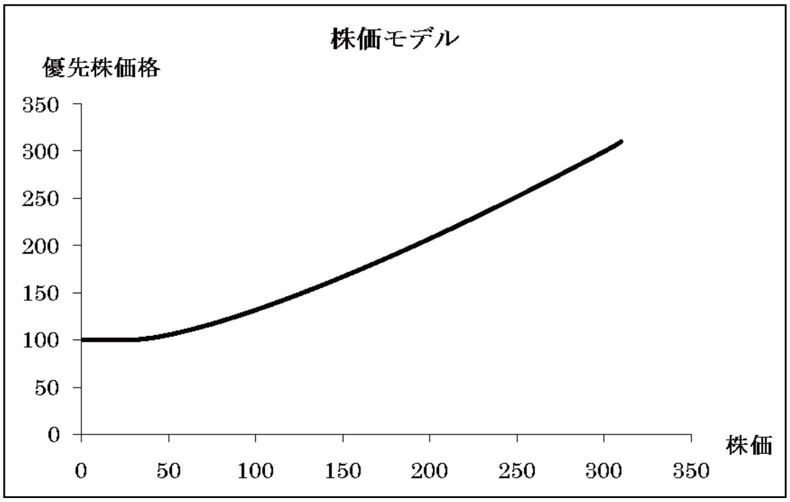

図1　株価モデルでの優先株価格

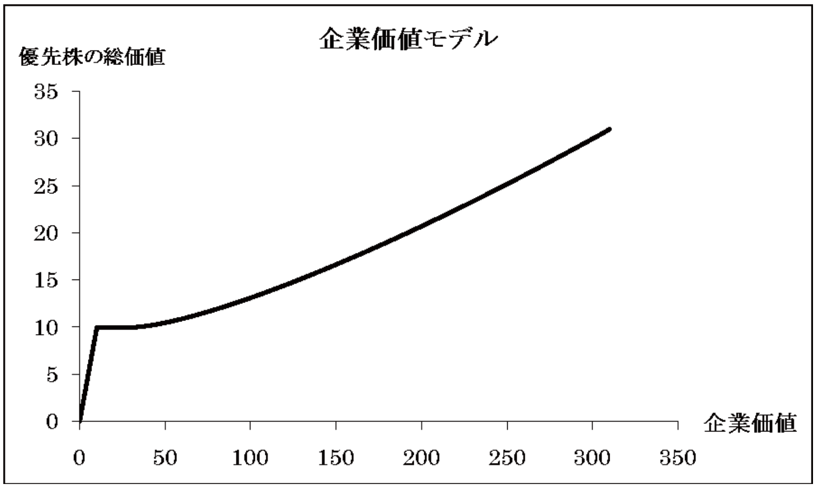

図2　企業価値モデルでの優先株の総価値

4. 結論

この論文では、普通株への転換権が付与される優先株式に優先株主が一定の価格で発行者に買い取り請求できる権利が付与される場合の優先株式について議論し、評価モデルを構築した。原資産の価格過程が株価である場合と企業価値である場合について、最適な権利行使閾値と評価式を導出した。数値例では、基礎データのともで、確率過程が幾何ブラウン運動と2重指数跳躍拡散過程において、株価モデルと企業価値モデルでの権利行使の閾値を求め、比較した。また、株価モデルと企業価値モデルでの優先株の価格と総価値を求めた。

附録

微分方程式により条件式の導出過程を示す。株価モデルは企業価値モデルから得ることができるので、ここでは、企業価値モデルのみ取り上げる。

$\log(x)=u, \log(x_1)=u_1, \log(x_2)=u_2$ とし、 $v(x)$ を(1)式の左辺に代入すると、

$$\sum\left(\frac{1}{2}\sigma^2\alpha_i(\alpha_i-1)+\mu\alpha_i-\lambda_1-\lambda_2-r\right)A_i e^{\alpha_i u}-(\lambda_1+\lambda_2+r)\frac{ab}{r}+ab$$
$$+\lambda_1\int_0^{u_1-u}\left(\sum A_i e^{\alpha_i(u+y)}+\frac{ab}{r}\right)f_1(y)dy+\lambda_1\int_{u_1-u}^{\infty}ae^{u+y}f_1(y)dy$$
$$+\lambda_2\int_0^{u-u_2}\left(\sum A_i e^{\alpha_i(u-y)}+\frac{ab}{r}\right)f_2(y)dy+\lambda_2\int_{u-u_2}^{u-\log(ak)}akf_2(y)dy$$
$$+\lambda_2\int_{u-\log(ak)}^{\infty}e^{u-y}f_2(y)dy$$

となる。積分して整理すると、

$$\sum(\Psi(\alpha_i)-r)A_i e^{\alpha_i u}$$
$$-\lambda_1 e^{\eta_1 u}\left(\sum\frac{\eta_1}{\eta_1-\alpha_i}A_i e^{-(\eta_1-\alpha_i)u_1}+\frac{ab}{r}e^{-\eta_1 u_1}\right.$$
$$\left.-\frac{\eta_1}{\eta_1-1}e^{-(\eta_1-1)u_1}\right)$$
$$-\lambda_2 e^{-\eta_2 u}\left[\left(\sum\frac{\eta_2}{\eta_2+\alpha_i}A_i e^{\alpha_i u_2}+\frac{ab}{r}-ak\right)e^{\eta_2 u_2}\right.$$
$$\left.+\left(ak-\frac{\eta_2}{\eta_2+1}e^{\log(ak)}\right)e^{\eta_2\log(ak)}\right]$$

となる。(1)式が任意のuに対して成立するためには、$A_i e^{\alpha_i u}, e^{\eta_1 u}, e^{-\eta_2 u}$の係数が零でなければならない。$\alpha_i$は$\Psi(\alpha_i)-r=0$の根であるから、$A_i e^{\alpha_i u}$の係数は零となる。$e^{\eta_1 u}$と$e^{-\eta_2 u}$の係数はそれぞれ(2)式と(3)式となる。

【注】

(1) 山田(2006)は強制転換条項付き優先株について、2項格子法で評価を行っている。

(2) 詳細については、Bertoin(1996), Sato(1999)を参照。

(3) Kou and Wang(2003, 2004)およびMordecki(1999, 2002)を参照。

(4) 評価式の導出については附録を参照。

(5) 普通株への配当総額を$cx-ab$と仮定すると、$x<ab/c$では普通株の配当が負になるが、xがx_2より小となる領域では優先株はなくなるので、$x_2\geq ab/c$あれば、この仮定は普通株の配当が負になること意味するものではない。

(6) 評価式の導出については付録を参照。

【参考文献】

Bertoin, J. (1996), Levy Processes, Cambridge University Press.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994), Investment under Uncertainty, Princeton.

Kou, S. G. (2002), "A Jump Diffusion Model for Option Pricing ", Management Science, Vol. 48.

Kou, S. G. and H. Wang (2003), "First Passage Time of a Jump Diffusion Process", Advances in Applied Probability , Vol. 35.

Kou, S. G. and H. Wang (2004), "Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model", Management Science, Vol. 50, No.9.

Mordecki, E. (1999), "Optimal Stopping for a Diffusion with Jumps", Finance and Stochastics, Vol. 3.

Mordecki, E. (2002), "Optimal Stopping, Free Boundary, and American Option in a Jump-diffusion Model", Finance and Stochastics, Vol. 6.

Sato, K. (1999),] Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press.

山田健(2006)、「強制転換条項付き優先株式の 2 項ツリーによるプライシング」、『金融研究』、日本銀行金融研究所。