予測不能な故障を考慮した設備取替の投資決定

Replacement Investment Decisions with Consideration of Unpredictable Damages

東洋大学経営力創成研究センター　研究員　董　晶輝

要旨

この論文は設備の取替え投資において、予測できないような維持費用の増加が生じる可能性を考慮したときの投資決定について議論する。維持費用が確定的に変化する場合と幾何ブラウン運動に従って変化する場合のモデルを整理し、予測できないような維持費用の増加をジャンプ過程でモデリング化する。維持費用が確定的に変化する場合と幾何ブラウン運動に従って変化する場合に比べると、予測できないような維持費用の増加を考慮したときに、取り替え水準は上昇し、期待総費用も増加することが明になった。

キーワード(Keywords)：設備の取替え投資（Replacement Investment）、設備の維持費用（Maintenance Cost）、ジャンプ過程（Jump Processes）、最適取替え水準（Optimal Maintenance Cost Level of Replacement）、期待総費用（Expected Total Cost）

Abstract

In this paper, we discuss replacement investment decisions with consideration of unpredictable increasing in maintenance costs in a real option model. After arrange the models of maintenance costs increasing at a constant rate and following geometric Brownian motion, we model unpredictable increasing in maintenance costs through adding jumps to geometric Brownian motion. We find that compare to the case of constant increasing and geometric Brownian motion, the optimal maintenance cost level of replacement and expected total cost in the case of unpredictable increasing is higher.

はじめに

企業の設備投資の大部分は、経年劣化した設備を新しいものに取り替える投資である。企業財務の視点での設備取替えの投資決定は設備の将来にわたる運用維持費用の現在価値と取替え費用の両方を考慮して行われる。設備取替え問題の古典である Terborgh(1949)では、設備の維持のための費用が設備の使用年数の関数として確定的に変化するとして、最適更新計画が取り扱われている。実際には使用中の設備の状態は不確実で、設備の維持費用も不確実的に変化する。その後の研究では、信頼性理論などの関連で設備の寿命が確率的に変化するモデルなどが取り上げられてきたが、設備の維持費用が確率的に変化する場合についての研究はほとんど見られなかった。設備の運用維持費用が確率的に変化する場合についての取扱ったものとしては、Mauer and Ott(1995)や Dobbs(2004)などがある(1)。これらの研究では、維持費用の確率的変動を幾何ブラウン運動と仮定している。

維持費用が確定的な場合、更新までの期間を変数として最適更新期間を求めることが多いが、ここでは、最適更新期間を求めるための条件式を更新時点でのコスト水準の式に変換することにより、維持費用が確率的に変動するときの更新の最適コスト水準を求める式との対応関係を明らかにする。設備の状態は経年劣化により、通常の小幅な変化以外、ときには故障等により大幅な劣化が起きる。これに伴って、設備の維持費用も大幅に上昇する。このような大幅な維持費用の上昇がどの時点で起き、変化の幅がどのぐらいになるのかについては予測が不可能である。ここでは、設備の故障（維持費用の大幅な上昇）が起きる可能性（あるいは頻度）をポアソン過程でモデル化し、故障が起きたときの維持費用の変化の幅が指数分布に従うと仮定し、これに通常の小幅な変化として幾何ブラウン運動を加え、設備の維持費用の確率的変化をモデル化する。これにより、予測できないような維持費用の増加が生じる可能性を考慮したときに最適な更新水準がどのように変化するか、期待総費用がどのようになるかを明らかする。

論文は次のように構成される。第 1 節では、基本モデルについて説明し、第 2 節では、維持費用が確定的に変化する場合の最適取替え期間を求める代わりに、維持費用の最適取替え水準を求めるための方程式を導出する。第 3 節では、維持費用の変化が幾何ブラウン運動に従う場合の総費用の期待現在価値と最適取替えを求め、最適取替え水準を求めるための方程式が維持費用の確定的変動する場合と一致することを示す。第 4 節では、予測できないような維持費用の増加を考慮した場合の総費用と最適取替え水準を求める。第 5 節では、予測できないような維持費用の増加を考慮したときに、総費用と最適取替え水および平均取替え周期がどのように変わるのか、それが投資決定にどのように影響を及ぼすのかについて明らかにする。第 6 節では、結論を述べる。計算式の導出については付録にまとめる。

１　基本モデル

設備の規模が一定で、設備の運用と維持には連続的に費用がかかる場合を考える。使用時間の経過につれ設備が劣化し、設備の運用維持費用は上昇する。ここでは、設備新設後 t 時間経過したときの運用維持費用を$X(t)$で表すことにする。運用維持費用がある水準に到達すると、新しい設備に取り替える。取り替え時点の運用維持費用の水準をx_1、取り替えの費用をI、取り替え直後の運用維持費用をx_0で表す。毎回の取り替え費用を一定とし、取り替え後の設備の運用維持費用の変化はすべて同様とする。将来のすべての運用維持費用と取り替え費用の現在価値の合計が最小になるように、取り替えの水準x_1を決める。$X(t)$ が確率的に変化する場合を考えるが、この問題の基礎として、$X(t)$が確定的に変化する場合から議論を始める。

２　確定的変化の場合

運用維持費用が設備の使用時間の経過につれ一定の率$\mu(>0)$で増加すると、取り替え後 t 時間経過したときの運用維持費用は

$$X(t)=x_0e^{\mu t}$$

となる。T 時間後に、設備の取り換えを行うとし、割引率をrすると、取り替え時点までの運用維持費用の現在価値は

$$\int_0^T X(t)e^{-rt}dt=\frac{x_0(e^{(\mu-r)T}-1)}{\mu-r}$$

となる。これに取り替え費用を加えると、

$$\frac{x_0(e^{(\mu-r)T}-1)}{\mu-r}+I$$

となる。将来のすべての運用維持費用と取り替え費用の設備取り替え直前での現在価値は

$$\left[\frac{x_0(e^{(\mu-r)T}-1)}{\mu-r}+I\right]e^{-rT}+\left[\frac{x_0(e^{(\mu-r)T}-1)}{\mu-r}+I\right]e^{-2rT}+\cdots=\frac{\dfrac{x_0(e^{(\mu-r)T}-1)}{\mu-r}+I}{1-e^{-rT}}$$

となる。これを最小にする設備の使用期間Tを求めるため、T で微分したものを零とすると次の方程式が得られる。

$$x_0e^{uT}(1-e^{-rT})=r\left[\frac{x_0(e^{(\mu-r)T}-1)}{\mu-r}+I\right]$$

$\alpha=r/\mu$　とすると、

$$x_1=x_0e^{\mu T},\qquad e^{-rT}=(e^{-\mu T})^{\alpha}=\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}$$

から、上の式は

$$x_1\left[1-\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}\right]=r\left[\frac{x_1\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}-x_0}{\mu-r}+I\right] \tag{1}$$

となる。

３　幾何ブラウン運動の場合

運用維持費用X(t)の変化がパラメータ$\mu(>0),\sigma(\geq 0)$の幾何ブラウン運動に従う場合、X(t)= xのときの総費用の現在価値V(x)はベルマン方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2V''(x)+\mu xV'(x)+x-rV(x)=0$$

を満たす。V(x)はｘ が零に近づくとき発散することはないので、

$$V(x)=\frac{x}{r-\mu}+Ax^{\alpha}$$

となる。ここで、Aは境界条件から決まる定数で、αは２次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2z(z-1)+\mu z-r=0$$

の正の根である。

取り替え時点についての最適条件$V'(x_1)=0$、すなわち、

$$\frac{x_1}{r-\mu}+\alpha A{x_1}^{\alpha}=0$$

から、A を求めて V(x)に代入すると

$$V(x)=\frac{x}{r-\mu}-\frac{x_1}{r-\mu}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\alpha} \tag{2}$$

となり、価値対等条件

$$V(x_1)=V(x_0)+I$$

からx_1は次の条件式を満たすことになる⑵。

$$\frac{x_1-x_0}{r-\mu}-\frac{x_1}{r-\mu}\frac{1}{\alpha}\left(1-\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}\right)-I=0 \tag{3}$$

$\sigma^2=0$のとき、2 次方程式の根αはr/μとなることと、前節の最後の式の両辺を$r=\alpha\mu$で割り、式を整理すると、上の式と同じ形になることから、両者の関係が明らかになる。

（3）式は、$r\neq\mu$のときには、

$$\alpha(x_1-x_0)-x_1\left[1-\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}\right]-\alpha(r-\mu)I=0 \tag{3′}$$

となり、$r=\mu$のときには

$$x_1-x_0+x_0\log\frac{x_0}{x_1}-\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)I=0 \tag{3″}$$

となる。また、$r=\mu$のときには（2）式は

$$V(x)=\frac{x\left(1-\log\left(x/x_1\right)\right)}{\mu+\sigma^2/2} \qquad (2')$$

となる。

4　ジャンプが含まれる場合

X(t)の変化が幾何ブラウン運動に上方へのジャンプが加わる場合について検討する。上方へのジャンプが発生すると，X(t) は YX(t)（Y>1）になるものとし、上方へのジャンプは幾何ブラウン運動とは互いに独立なポアソン過程で発生するものとする。ポアソン過程のパラメータをλで表す。Y の確率分布として、ここでは、$y=\log Y$を確率密度関数が

$$f(y)=\eta e^{-\eta y}$$

の指数分布に従うとする。X(t)はレヴィ過程と呼ばれるもの一種であるが、レヴィ過程では一般に$E[(X(t))^z|X(0)=1]=\exp\,[\Psi(z)t]$となる$\Psi(z)$が存在し、$\Psi(z)$はレヴィ冪指数と呼ばれる。この場合のレヴィ冪指数は

$$\Psi(z)=\frac{1}{2}\sigma^2 z(z-1)+\mu z+\lambda\left(\frac{\eta}{\eta-z}-1\right)$$

である。また、X(t)が x のときの総費用の現在価値$V(x)$についてのベルマン方程式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2V''(x)+\mu xV'(x)+\lambda E[V(Yx)-V(x)]+x-rV(x)=0$$

となり(3)、

$$V(x)=\frac{x}{r-\Psi(1)}+Ax^\alpha+Bx^\beta$$

となる。ここで、α,β は方程式 $\Psi(z)=r$ の正の根である。A,Bとx_1は付録にある通り、次の連立方程式より求められる。

$$\frac{\eta}{\eta-1}\frac{x_1}{r-\Psi(1)}+\frac{\eta}{\eta-\alpha}A{x_1}^\alpha+\frac{\eta}{\eta-\beta}B{x_1}^\beta=\frac{x_0}{r-\Psi(1)}+A{x_0}^\alpha+B{x_0}^\beta+I$$

$$\frac{x_1}{r-\Psi(1)}+A{x_1}^\alpha+B{x_1}^\beta=\frac{x_0}{r-\Psi(1)}+A{x_0}^\alpha+B{x_0}^\beta+I$$

$$\frac{x_1}{r-\Psi(1)}+\alpha A{x_1}^\alpha+\beta B{x_1}^\beta=0$$

5　予測できない故障の影響

この節では、2 節、3 節のモデルと、4 節のモデルについて数値例を用いて、

予測できないような維持費用の増加を考慮したときに、総費用と最適取替え水準および平均取替え周期を示す。計算で使用するパラメータ値を表１に示した。モデル１はコストが年率 20%で確定的に増加する場合で、モデル２では、確率的な変動を加えるため、コストの変化率の標準偏差が 20%であるとした。モデル３は、モデル２の確率的変動に加えて、通常予想されないような状況をも考慮するため、10 年に 1 回程度、平均 30%程度のコスト上昇が発生するかもしれない状況を仮定した。ここでは logY の確率分布をパラメータ η の指数分布としたので、η は、$E[Y]=\eta/(\eta-1)$から 4.3333 となる。各モデルについて、取り替え水準（x_1）、平均取り替え間隔（$E(T)$）、期待現在価値（$V(x_1)$）を求めた結果を表 2 に示した。各モデルについてコストの水準が x のときの総費用の期待現在価値を図 1 に示した。

表１：　パラメータ値

	モデル１	モデル２	モデル３
I	50	50	50
x_0	1	1	1
r	0.05	0.05	0.05
μ	0.2	0.2	0.2
σ		0.2	0.2
λ			0.1
E[Y]			1.3

表２：　最適政策の結果

	取り替え水準（x_1）	平均取り替え間隔（$E(T)$）	期待現在価値（$V(x_1)$）
モデル１	9.2235	11.1088	184.4705
モデル２	9.4748	12.4924	171.0440
モデル３	9.9927	11.4232	181.0316

モデル１，２，３の平均取り替え間隔$E(T)$は、それぞれ以下の式で計算した(4)。

$$E[T]=\frac{1}{\mu}\mathrm{Log}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \tag{4}$$

$$E[T]=\frac{1}{\mu-\sigma^2/2}\mathrm{Log}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \tag{5}$$

$$E[T]=\frac{1}{\mu-\sigma^2/2+\lambda/\eta}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)+\frac{(\alpha-\eta)\left(1-(x_0/x_1)^{\alpha}\right)}{\alpha\eta}\right] \tag{6}$$

(6)式の α は

$$\alpha = \frac{\eta + 1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\eta + 1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + \eta\mu)}{\sigma^2} - \eta}$$

である。

確定的な変動に確率的変化が加わると取り替え水準は上昇する。これはリアル・オプション・モデルでしばしばみられる現象で、確率的変動は取り替えを遅らせることになる。これにより、平均の取り換え間隔も確定的な場合より長くなり、総費用は減少する。これに対し、通常予想しないようなコストの急上昇を考慮にいれると、取り替え水準はさらに上昇するが、ジャンプによるコストの急上昇があるため、平均取り換え間隔は、通常の確率的変化だけを考慮するモデル 2 より短くなり、総費用も増加する。

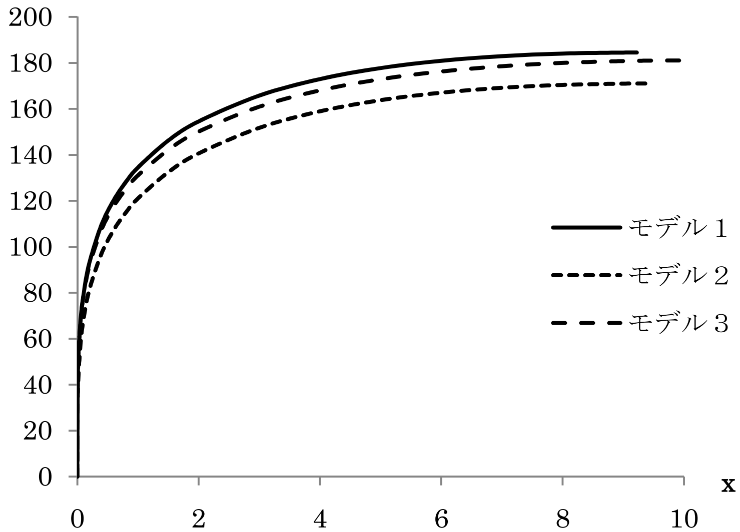

図１　総費用の期待現在価値

６　結論

この論文は設備の取替え投資について、予測できないような維持費用の増加が生じる可能性を考慮したときに最適な更新水準がどのように変化するか、期待総費用がどのようになるかを明らかにすることを試みた。そのために、維持費用が確定的に変化する場合と幾何ブラウン運動に従って変化する場合のモデルを整理した。維持費用が確定的に変化する場合の最適取替え期間を求める代わりに、維持費用の最適取替え水準を求めるための方程式を導出し、この方程式が幾何ブラウン運動に従う場合の最適取替え水準を求めるための方程式と一致することを示した。予測できないような維持費用の増加を考慮したときに、取り替え水準は上

昇し、コストの急上昇があるため、平均取り換え間隔は、通常の確率的変化だけを考慮する場合より短くなり、総費用も増加することが明になった。言い換えると、予測できないような維持費用の増加を無視することは、維持費用の低いところで設備の取替えを行うことになり、すなわち、より早い時期に設備の更新をすることになり、設備の更新回数が増え、総費用の増加につながる。また、予測できないような維持費用の増加を無視することで、総費用を過小評価することになり、投資決定を誤る可能性がある。実務での応用としては、資本計画の際に、各種の不測事態を想定したシナリオ分析において、不測事態が起きたときの費用を推測することができる。また、不測事態の発生を考慮した設備の取替え周期のもとで新しい設備の手配などをしておくことにより、危機管理にも役に立つ。

【付録】

方程式$\Psi(z)-r=0$の正の根をα,βとし、$X(t)=x$ のときの総費用の期待現在価値を

$$V(x)=\begin{cases}Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+cx & x<x_1\\ A{x_0}^{\alpha}+B{x_0}^{\beta}+cx_0+I & x\geq x_1\end{cases}$$

と仮定すると、$x<x_1$では（2）式は

$$\frac{1}{2}\sigma^2\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha}+\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)Bx^{\beta}+\mu\alpha Ax^{\alpha}+\mu\beta Bx^{\beta}+\mu cx$$
$$+\lambda\{E[V(xY)]-(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+cx)\}+x-r(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+cx)$$
$$=0 \qquad (A1)$$

となる。$E[V(xY)]$は

$$V(xY)=V(xe^y)=\begin{cases}Ax^{\alpha}e^{\alpha y}+Bx^{\beta}e^{\beta y}+cxe^y & xe^y<x_1\\ A{x_0}^{\alpha}+B{x_0}^{\beta}+cx_0+I & xe^y\geq x_1\end{cases}$$

であるから、

$$E[V(xY)]=\int_0^{\mathrm{Log}\frac{x_1}{x}}\left(Ax^{\alpha}e^{\alpha y}+Bx^{\beta}e^{\beta y}+cxe^y\right)\eta e^{-\eta y}dy$$

$$+\int_{\mathrm{Log}\frac{x_1}{x}}^{\infty}\left(A{x_0}^{\alpha}+B{x_0}^{\beta}+cx_0+I\right)\eta e^{-\eta y}dy$$

$$=\frac{\eta}{\eta-\alpha}Ax^{\alpha}+\frac{\eta}{\eta-\beta}Bx^{\beta}+\frac{\eta}{\eta-1}cx$$
$$+\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\eta}\left(-\frac{\eta}{\eta-\alpha}A{x_1}^{\alpha}-\frac{\eta}{\eta-\beta}B{x_1}^{\beta}-\frac{\eta}{\eta-1}cx_1+A{x_0}^{\alpha}+B{x_0}^{\beta}\right.$$
$$\left.+cx_0+I\right)$$

となる。これを(A1)式に代入し整理すると、

$$Ax^{\alpha}[\Psi(\alpha)-r]+Bx^{\beta}[\Psi(\beta)-r]+x\left[\mu c+\lambda\left(\frac{\eta}{\eta-1}-1\right)c-rc+1\right]$$
$$+\lambda\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\eta}\left(-\frac{\eta}{\eta-\alpha}Ax_1{}^{\alpha}-\frac{\eta}{\eta-\beta}Bx_1{}^{\beta}-\frac{\eta}{\eta-1}cx_1+Ax_0{}^{\alpha}+Bx_0{}^{\beta}\right.$$
$$\left.+cx_0+I\right)=0 \tag{A2}$$

となる。(A2)式が任意の x について成立するためには、$x^{\alpha}, x^{\beta}, x, x^{\eta_i}$の係数が零でなければならない。$\Psi(\alpha)-r=0, \Psi(\beta)-r=0$であるから$x^{\alpha}, x^{\beta}$の係数が零となる。また、x の係数

$$\mu c+\lambda\left(\frac{\eta}{\eta-1}-1\right)c-rc+1=0$$

から、

$$c=\frac{1}{r-\left[\mu+\lambda\left(\frac{\eta}{\eta-1}-1\right)\right]}=\frac{1}{r-\Psi(1)}$$

となる。x^{η}の係数が零となる条件式は

$$\frac{\eta}{\eta-\alpha}Ax_1{}^{\alpha}+\frac{\eta}{\eta-\beta}Bx_1{}^{\beta}+\frac{\eta}{\eta-1}cx_1=Ax_0{}^{\alpha}+Bx_0{}^{\beta}+cx_0+I \tag{A3}$$

となる。これに任意の取替え水準x_1が与えられたときの境界条件（価値対等条件）

$$Ax_1{}^{\alpha}+Bx_1{}^{\beta}+cx_1=Ax_0{}^{\alpha}+Bx_0{}^{\beta}+cx_0+I \tag{A4}$$

と最適条件（滑らかな張り合わせ条件）

$$\alpha Ax_1{}^{\alpha}+\beta Bx_1{}^{\beta}+cx_1=0 \tag{A5}$$

からなる連立方程式から最適取り替え水準x_1およびそのときの係数はA, Bを求めることができる。

【注】

* 受付日：2010 年 1 月 12 日　　受理日：2010 年 2 月 5 日

(1) Mauer and Ott(1995)は旧設備の処理費用と新規設備の投資費用の税効果も考慮して、維持運用費用の変動が設備取替え直後の値（反射壁）を下回らないとし、維持運用の最適な取替え水準を求め、平均取替え間隔（周期）を求めた。さらに、モデルの展開として、租税と技術の不確実性の効果について議論している。Dobbs(2004)は中古設備の価値を考慮した場合の最適取替え水準を求め、設備の経済的寿命と中古設備の価値について議論している。さらに、各変数についての感度分析の結果を示している。

(2) 最適条件および価値対等条件は Dixit and Pindyck (1994)を参照。

(3) レヴィ冪指数およびベルマン方程式については、Boyarchenko (2004), Kou and Wang(2004)などを参照。

(4) (5)式は Cox and Miller(1965)などを参照。(6)式は Kou and Wang(2003)に示されている。

【参考文献】

Boyarchenko, S. (2004), "Irreversible Decisions and Record-Setting News Principles," *The American Economic Review*, Vol. 94, No. 3

Cox, D. R. and H. D. Miller (1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen and Co. LTD.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.

Dobbs, I. M. (2004), "Replacement Investment: Optimal Economic Life under Uncertainty," *Journal of business Finance and Accounting,* Vol. 31, No. 5,6.

Kou, S. G. and H. Wang (2003), "First Passage Times of a Jump Diffusion Process", *Advances in Applied Probability,* Vol. 35.

Kou, S. G. and H. Wang (2004), "Option Pricing under a Double Exponential Jump Diffusion Model", *Management Science,* Vol. 50, No. 9.

Mauer, D. C. and S. H. Ott (1995), "Investment under Uncertainty: The Case of Replacement Investment Decisions," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 30, No. 4.

Terborgh, G. (1949), *Dynamic Equipment Policy*, McGraw-Hill.