非線形性の哲学

文学研究科哲学専攻博士後期課程修了
後藤　　蔚

要旨

物理的系とそれを写し取る数学的モデルとは別のものである。決定論とか偶然性とかは数学的モデルにおける問題である。

自然は全体で一つの系をなし、そこでは、互いが互いに影響し合って、次の状態が決まって行く。自然界においては、出力が次の入力となる。それが自然界の非線形性を生み出す。自然においては決定論も偶然性もない。

キーワード

決定論、予測不可能性、偶然、カオス、線形、非線形、フィードバック

目次

１．決定論と予測不可能性

古来、小さな原因は小さな結果しか齎さず、大きな結果を生むには大きな原因が必要であると考えられて来た。結果は原因に比例するのであり、デカルトの『省察』における神の存在の第一証明もそうした考えに基く。

では、小さな原因が大きな結果を生むことはあり得ないのだろうか。ポアンカレはルーレ

ットの例を挙げる[1]。円盤を100個の扇形に分けて、交互に赤と黒とに染めよう。針が赤い扇形の上に止れば勝、然らざれば負とする。さて、万事は私が針に与える最初の一押しにある。即ち、針は10乃至20回転するものとして、最初の押す力が1000分の１乃至2000分の１違うだけで、赤に止る筈のところがその隣の黒に止り、あるいはその逆となろう（100×10＝1000、100×20＝2000）。原因における差異は機械でも感知出来ないほど小さいが、結果は私の賭金全部にかかわる。かくて、小さな原因が大きな結果を生んだのである。結果は原因に比例しない。それで、こうした現象は「非線形」であると云われる。

しかし、この場合といえども、「原因」が「結果」を「決めて」いることには違いない。赤に止るか、黒に止るかは決して「偶然」ではない。最初の一押しによって赤に止るか黒に止るかは既に決まっているのであるが、我々にはそれが分らないだけである。結局、これは、決定論には従うが、予測は不可能な事例である。

一般に、或る系が決定論に従うとは、その系の振舞が方程式によって定められていることである。どう振舞うかが方程式によってきちんと規定されているに拘らず、我々はその系の未来を予測出来ないような現象が存在する。これを「パイ捏ね変換」を例に見てみよう。

一辺の長さが１の正方形のパイ生地があるとする。これを先ず右へ二倍に引伸ばし、そうして得られた底辺が２、高さが1／2の長方形を真ん中で二分し、右半分を、左半分の真上に置く。これを次々に繰返して行くのがパイ捏ね変換である。

最初、正方形のパイ生地の左半分は白く、右半分は黒かったとしよう。このパイ生地を右へ二倍に引伸ばすと、白の部分、黒の部分はどちらも底辺が１、高さが1／2の長方形となる。そして、全体の右半分である黒の部分を、全体の左半分である白の部分の真上に置くのであるから、結局一回のパイ捏ね変換によって得られるのは、底辺が１、高さが1／2の白の長方形の上に、同じ大きさの黒の長方形が乗ったものである。これにもう一回パイ捏ね変換を施すと、下から順に白、黒、白、黒と、夫々底辺が１、高さが1／4の長方形の層が４個積みかさなったものが得られる。更にもう一回変換を施せば、底辺が１、高さが1／8の長方形の層が８個積みかさなったものとなる。下から順に、白、黒、…であり、一番上は黒である。このような変換は何回でも繰返し行うことが出来る。

このパイ捏ね変換は方程式で表すことが出来る。$0\leqq x\leqq 1$、$0\leqq y\leqq 1$として、パイ生地中の点（x、y）は、一回のパイ捏ね変換によって、点（x′、y′）に移るとしよう。図を書いて見ればすぐ分るように、$0\leqq x\leqq 1/2$ の場合には $x'=2x$、$y'=y/2$ であり、$1/2<x\leqq 1$ の場合には $x'=2x-1$、$y'=(y+1)/2$ である。このように変換そのものには何の曖昧さもなく、従って、それを何回繰返したところで偶然性やランダム性の発生する余地は全くない。まさに決定論の世界である。

では、予測不可能性はどこから来るのか。各回の変換で、パイ生地はその都度、水平方向には２倍に引伸ばされ、縦方向には1／2に縮んで行く。層の厚さはみるみる薄くなり、n回

の変換後には1／2^nになる。これは、n＝30で約10億分の１という薄さである（$2^5=32$だから$2^{10}=(2^5)^2=1024\fallingdotseq10^3$、従って、$2^{30}=(2^{10})^3\fallingdotseq(10^3)^3=10^9=10$億)。もうこうなれば、我々が眼にするのは、白と黒の層が幾重にも積み重なったものではなく、どの部分も全く一様な灰色の広がりだけである。ある部分が白ければ、第一回のパイ捏ねを開始する前に、その部分はパイ生地の左半分にあったのであり、黒ければ右半分にあったのであるが、灰色ではどこにあったのかは全く分らない。パイ捏ね変換は可逆である[2]から、上記のことは次のことを意味する。即ち、パイ生地中の一点の初期位置を2^{-30}（10億分の１）という驚異的な精度で知っていたとしても、30回の変換後の位置は全く予測出来ない[3]。一回の変換に１秒かかるとして、僅か30秒後の予測が不可能なのである。かくて、パイ捏ね変換は、決定論には従う（方程式で記述可能）が、未来を予測することは不可能（30秒後の位置が分らない）な変換であることが分った。

２．偶然性は何に由来するかー保存力学系と散逸力学系

ルーレットやパイ捏ね変換で予測が不可能なのは、初期条件を充分な精度で知ることが出来ないからである。ルーレットについては、最初の一押しの力を1／1000乃至1／2000の精度で制御出来れば、赤でも黒でも望みの色に針を止めることが出来る筈である。(その場合、一旦、針を押した後は、外部から不測の影響を受けないことが前提されている。これに関しては後で論じる。）パイ捏ね変換に関しては、n回の変換後の点の位置をN桁の精度で予測するためには、最初の点の位置をN＋nの精度で知っていなければならない[4]。

ルーレットの針がどこに止るかを予測出来ないということが、とりもなおさず、ルーレットを「偶然」のゲームに仕立てている。そして、パイ捏ね変換で、或る時間経過後の点の位置が「ランダム」に見えるのも、位置が予測不可能だからである。してみると、「偶然」や「ランダム」といっても、それは、「予測不可能」であることの云い換えである。べつに偶然性やランダム性なるものがある訳ではない。予測が出来ないことをそう呼んでいるに過ぎない。そして、なぜ予測出来ないかといえば、上の二つの例では、初期条件を充分な精度で知ることが出来ないからであった。これは云い換えれば、系が初期条件に極めて敏感に反応するということである。系がどんな軌道を辿るかは初期状態で決まる。それで、初期状態がほんの僅か違っても、まるきり別の軌道になってしまうのである。

では、偶然性・ランダム性の源泉は初期条件の精度不足だけなのかと云えば、そうではない。実は、それを生み出すものがもう一つ存在する。以下にそれを見てみよう。

気象学者ローレンツは、1960年代に、大気の運動に関する熱対流モデルの発展方程式の研究を開始した。それは次の形のものである。

$$\dot{X}=-\sigma X+\sigma Y、\dot{Y}=-XZ+rX-Y、\dot{Z}=XY-bZ$$

$\dot{X}$、$\dot{Y}$、$\dot{Z}$は、３次元の「状態空間[5]」の中の一点（X、Y、Z）を通過する状態点の速度の

三つの成分を表す。この場合も、方程式は数式で明確に与えられているにも拘らず、ここから「カオス[6]」が出現するのである。カオスとは「決定論的な系において起る確率論的な振舞」である。即ち、カオスは、決定論的な（つまりランダムでない）系が、見掛け上ランダムに振舞うときに生起する。その意味では、ルーレットもパイ捏ね変換もカオスを生む系である。それらにおいては、カオスの源泉は、初期条件に対する鋭敏性にあったが、ローレンツのモデルにおいては何がカオスを生んでいるのか。

ローレンツの方程式中には三つのパラメーターσ、r、bがあるが、σとbとは固定し、r（上面と下面の間の温度差に相当）を変化させる。rが十分に小さいと、どの状態点から出発しても、最後には全て状態空間の原点に落込む。これは対流のない静止した状態—「伝導状態」—に対応している。rを大きくして行くと、「分岐」が起って、新しい定常点が出現する。これは定常な流れを持つ「対流状態」を表す。流れの向きを逆転させた状態も同じ資格を持つ定常解なので、定常点は二つあり、原点に関して対称な位置にある。どちらに落着くかは、どの状態点から出発するかによる。さらにrを上げて行くと、この二つの定常状態は同時に不安定化し、ローレンツ・カオスと呼ばれる複雑な運動—「乱流」—が突如として現れる。これがカオスの書物ではお馴染みの、蝶の翅に喩えられるものである。それは、あたかも左右に広げた蝶の左の翅の縁を何回転かして右の翅に飛移り、その縁を何回転かした後、また左の翅へ、というような運動を繰返す。「アトラクター」とは系の近づいて行く先であるが、それらの中で、回帰的ではあるが、周期的ではなく、従って、軌道が閉じず、極めて複雑な動きを示すのがストレンジ・アトラクターであり、ローレンツ・カオスはその典型である。即ち、ローレンツ・カオスは、どういう初期状態から出発しても、時間が経てばそれに限りなく接近して行く「アトラクター」としての運動状態である。従って、ローレンツ・カオスは、初期条件に対する鋭敏性に起因するものでは全くない。

このモデルによって、ローレンツは、なぜ気象の長期予測が困難なのかを示して見せた。気象現象では現象の時間発展自体が不安定なのである。このことの意味は次の通りである。

三つの変数X、Y、ZのうちZの動きを追うと、Zは不規則に波打ちながら、次々にピーク（極大値）Z_1、Z_2、Z_3、…を迎える。そこで、平面上に点（Z_1、Z_2）、（Z_2、Z_3）、（Z_3、Z_4）、…、（Z_n、Z_{n+1}）、…をプロットして行くと、頂点が鋭く尖った山形の曲線が出現する。カオスの中にきれいな規則性が潜んでいたのである。曲線の勾配が急（±45度以上）だということは、Z_nの値に小さな不確定性ないし誤差があると、それが拡大されてZ_{n+1}の値に反映されるということである。それで、数列Z_1、Z_2、Z_3、…はどこ迄行ってももとの価に戻るということはあり得ない（もとの値に戻るとすれば、そこから先は前と同じことの繰返しであるから、誤差が拡大する一方だということにはならない）。Z_nがもとの値に戻ることがないということは、（X、Y、Z）そのものの軌道が非周期的であることを意味する。ただし、非周期的であると云っても、軌道は状態空間中の或る一定の領域に閉じ込められてい

る。つまり、（X、Y、Z）の軌道は決して閉じることはないが、充分近くに戻ってくることはある。それが回帰的ではあるが周期的ではないということの意味である。結局、不安定でありながらどこへ逃れることも出来ない永続的な非周期運動がローレンツ・カオスなのである。

なぜそういうことが起きるのか。この場合にも系の振舞は上記のローレンツ方程式によってきちんと定められている。つまり系は決定論に従うのであるが、しかし、その方程式は解けない。系が実際にどう振舞うかは、コンピューターで計算して見るほかない。計算には端数処理がつきものである。計算過程で生じた端数処理に伴う誤差は、次のステップで相殺される場合もあろうが、ローレンツ方程式の場合にはステップを追うごとに拡大されて行く。それがカオスを生じさせているのである。計算過程における誤差の拡大—これがローレンツ・モデルにおける偶然性・ランダム性の源泉である。つまり、カオスは、数値解析それ自体の中、即ち、コンピューターが何かを計算するそのやり方の中に潜んでいるのである。それで、同じ問題を二台のコンピューターを用いて、異なった計算方式で走らせてみると、全く異なった結果が出る。最初は似かよっていても、反復回数が多くなるに従い、全く違った答を出すようになるのである。

しかし、百人が百台の異なったコンピューターを走らせても、描き出されるローレンツ・アトラクターの姿は殆ど変らないであろう。即ち、例の、蝶の左右の翅に沿っての不規則な回転である。一定時間経過後の状態点は、或るコンピューターでは左の翅の上方に位置し、別のコンピューターでは右の翅の真ん中あたりに位置するということはあろう。それらは全く別の位置である。しかし、描き出された蝶の翅の図そのものは殆ど見分けがつかない筈である。カオスにはこうした安定性もあるのである。

誤差の拡大がローレンツ・カオスの原因だと聞かされれば、それは端数処理という単なる計算上の問題、小数点以下何桁までとるかという技術上・精度上の問題だと思われもしよう。しかし、計算する以上は無限の桁数で計算することは不可能である。計算に端数処理は不可避であり、その意味でローレンツ・カオスは原理上・理論上の問題であり、本質的である。百台のコンピューターが計算方式は違ってもほぼ同じ蝶の翅を描き出すというのは、まさにその本質を抽出しているのである。

さて、既に述べたように、ローレンツ・カオスは、初期条件に対する鋭敏性によるカオスではない。それどころか、どんな初期状態から出発しても、そこに引き寄せられてしまうのである。これは、初期状態がほんの僅か違っても全く別の軌道になってしまうルーレットやパイ捏ね変換と大きく異なる点である。ルーレットやパイ捏ね変換は保存力学系と呼ばれるものに属し、ローレンツ・モデルは散逸力学系に属する。

前者は、例えば、空気抵抗や摩擦のない振子の運動や、弾性衝突を繰返す分子集団の運動

を記述する力学系である。エネルギーの散逸がなく、エントロピーを生成しない。状態空間内の細胞の体積は時間が経っても変わらない。決まった落着き先（アトラクター）はなく、どんな軌道を辿るかは専ら初期状態によって決まる。

後者は、例えば、粘性を持つ流体の運動を記述する力学系であり、時間進化が不可逆な非平衡開放系である。エネルギーを散逸し、エントロピーを生成する。状態空間内の細胞の体積は時間の経過とともにゼロに収束する。即ち、細胞内の多数の初期点の全てが同じ運動状態（アトラクター）に収束して行く。ストレンジ・アトラクターは軌道が決して閉じることはないが、軌道に太さはないので、体積は矢張りゼロである。散逸力学系では、充分な精度の初期データを持っていても現象の時間発展自体が不安定なので、予測は困難である。詳しいことは省略するが、散逸力学系は自己組織化とカオスの両方を示すことが出来る。

ところで、先に、カオスとは「決定論的な系において起る確率論的な振舞」であるとした。その意味では、ルーレットやパイ捏ね変換が示す振舞はカオスであり、ローレンツ・モデルのそれもカオスである。このように、カオスは保存力学系においても散逸力学系においても見られる現象である。その場合、「確率論的」とは、どちらの系においても、「予測不可能」ということであった。決定論には従うが、未来の振舞が予測出来ないのである。予測不可能性は、系の動きが初期条件に極めて鋭敏に依存すること（保存系のカオス）、あるいは、時間発展中に誤差が拡大すること（散逸系のカオス）に由来する。このことは、状態空間中の軌道で云えば、互いに近接していた軌道が、時間の経過とともに指数関数的に離れて行ってしまうことを意味する。それで、軌道が分離して行く度合—リヤプノフ指数—を用いてカオスを定義することも出来る。

さて、「確率」の対象となるのは「偶然」事象である。上の議論は偶然とは何かに答えてくれている。初期条件に対する鋭敏性にせよ、途中における誤差の拡大にせよ、それらは、結局、「小さな原因から大きな結果」ということに他ならない。ここで再びポアンカレに戻ることになる。

ポアンカレによれば偶然は存在しない。何ごとかが原因なしに生じるなどということはあり得ない。ものごとには必ず原因があるのであるが、原因における小さな差異が結果において大きな違いを齎すとき、我々はそれを偶然と呼ぶのである。さて、それでは、それは量子力学においても云えることなのだろうか。

３．量子力学における偶然性—統計的規則性の起源

ポアンカレの後に出現した量子力学は、ポアンカレとは別の方向に進んでしまった。ポアンカレの三体問題（惑星の運動を予測するのに、当の惑星と太陽とだけを考慮するのでなく、他の惑星の存在も考慮に入れて予測する問題）などに関する研究が掘起こされたのは漸く

1960年代になってからである。それはコンピューターの発展と軌を一にした。ポアンカレが指摘したような現象を記述する微分方程式は一般には解くことが出来ず、その振舞を調べるには、コンピューターによるシミュレーションが不可欠であったからである。

さて、量子力学においては、偶然は根源的なものだというのが正統的な見方である。アインシュタインは、ボーアやボルンなどのそうした見方に反対し、「神は賽を振らない」と主張した。正統的な見方では、ウラニウムなどの放射性原子が或る瞬間に崩壊するかどうかは、純粋に偶然の問題だと考える。正統派にとって、量子力学における偶然性は、それ以上何かに還元することの出来ない、また、そうする必要のない、基本的・根源的なものなのである。

ところで、放射性原子の崩壊は統計法則には従っている。それは例えば半減期の存在によって分る。半減期とは放射性原子が崩壊して残存原子数が最初の原子数の1／2になる迄の期間の長さであり、統計的に確定する。それでは、このような統計的な規則はどこから出て来るのか。どうしてそのようなことが生じるのか。それについて正統派は何も答えない。答える必要がないのである。何故なら、彼等にとって、偶然とか確率とか統計法則とかは、もうそれ以上説明する必要のない、根源的なものだからである。

しかし、そうした見方が全ての物理学者によって共有されているという訳ではない。例えばボームの「隠れた変数」論は、パイ捏ね変換などにおけるカオス性が変換を定義する数式そのものに由来するように、放射性原子の崩壊も「内部変数」の振舞に由来するのだと云う。我々はその内部変数を未だ知らないだけである。ボームによれば、量子的非決定性は、宇宙がどこまでいっても確率的なものでしかないことを表しているのではなく、「観測者」によってはどうしても知られないことを示すサインなのである。

以上を要するに、我々は古典力学で屡々観察される偶然性・ランダム性の原因が決定論的カオスであることの理解に到達したばかりであるが、同様なことが量子力学においても可能なのではないかということである。これは「量子的カオス」として一部の物理学者の間で関心を呼んでいる問題である。

4．物理的系と数学的モデル

何かを観測するとして、当然のことながら、観測されるものは、当のその何かとは別である。観測することは、その何か自体になることとは異なる。同様に、或る現象が数学で表現されているとして、数学は現象それ自体ではない。或る物理的系とそれを写し取る数学的モデルとは別であるが、初期条件の精度とか、計算過程における誤差の拡大とかは、数学的モデルの側の問題である。

そうだとすれば、偶然性とかランダム性とか云っても、それは数学的モデルにおける話であり、現実の物理的系における話ではないということになる。やれ決定論だ、偶然だというのも、それは現実を抽象化することによって生じているに過ぎない。

このように考えるとすれば、偶然性・ランダム性の起源は、初期条件の精度と、計算過程における誤差の拡大という二つの他に、もう一つ存在することになる。即ち、「モデル化」ということ、それ自体である。モデル化に際しては、問題にしていることと関係ないと思われることは切り捨てられる。そのことなくしてモデル化は不可能である。極言すればモデル化とは切り捨てであり、孤立化である。内と外とに峻別し、モデルの外部における出来事は、モデルの内部における事態の進行とは無関係だと見做す。モデルの内は内だけで展開して行くのである。しかし、それは、単純化であり、理想化であることは明らかである。実際にはそのようなことはあり得ない。外部からの影響は必ずあるのであり、それは内部の進行を乱す。そのようなとき、その乱れは偶然に生じた、ランダムに起ったと云われるのである。

外部を内部から切り離すということは、外部の出来事は、内部にとって因果関係にないと見做すということである。だから、外部からの影響で内部の進行に影響が生じたとすれば、それは内部にとって因果関係から外れたことが起ったのであり、従ってそれは「偶然」である。因果関係の外にあることを指して偶然と呼ぶのである。

さて、そこで、もう一度、ルーレットに戻ろう。針が赤に止るか黒に止るかは最初の一押しによって決定されていると前に述べた。その場合、一旦針が回り出してから後は、外部の影響を受けないことが前提されていたのである。パイ捏ね変換にしても、一旦パイ捏ねが開始された以上は、その操作は、外部からの妨害を受けず、正確にどこ迄も続け得ると仮定されている。バタフライ効果でも同様である。北京での一匹の蝶のはばたきがメキシコ湾にハリケーンを惹き起す迄の間、その過程は、ロンドンでの別の蝶のはばたきの影響を受けない。

ということは、先に述べたような形でのルーレットやパイ捏ね変換やローレンツ・モデルは、物理的系そのものではなく、数学的にモデル化されたものであるということである。それらには単純化、理想化が施されている。

5. 計算と展開

さて、以上のように決定論や偶然性はモデルの側の問題だとすれば、では、現実の世界の方はどのようになっているのだろうか。

先ず、「計算」とは何かということから見て行こう。ここに二つのブラックボックスがあるとして、一つには何らかの物理的過程が入っており、もう一つにはそれをシミュレートするコンピューターが入っているとする。さて、一方は他方をシミュレートしている以上、速い、遅いの違いはあるとしても、二つの箱に対する同一の入力は同一の出力を齎す筈である。この場合、どちらの箱が物理的過程で、どちらの箱がコンピューターかは分らない、しかし、どちらか一方がコンピューターである以上、その箱は計算したのであり、そうだとすれば、それと同一の結果を出したもう一方の箱も計算したのだと云わざるを得ないだろう。このよ

うに考えれば、自然の物理的な活動そのものが、自然の行う計算に他ならない。

前節で、或る物理的系とそれを写し取る数学的モデルとは別であると述べた。そのことは、計算するのは数学的モデルだけだということを意味しない。物理的系と数学的モデルとの違いは、計算する、しないにあるのではなく、一方が他方の理想化、単純化であるということにある。どちらも計算しているのであるが、その計算の仕方は全く異なる。初期条件の精度とか、計算過程における誤差の拡大とかは、数学的モデルに固有の問題である。コンピューターを使ってシミュレートする以上、精度や端数処理の問題は必然的に発生する。一方、物理的系においては、系の展開そのものが計算なのであるから、精度や端数処理の問題は存在しない。

系の展開と計算とが一体となって進行する様子は、人工物ではあるがセル・オートマトンを見れば、よく分る。

セル・オートマトンでは、平面を格子で仕切り、正方形の升目から成る碁盤を考える。各正方形は「セル」と呼ばれる。各時刻において、各セルは有限個の状態のうちの一つだけをとるものとする。「状態」とは、例えば、〈赤、黄、青〉の三個の状態でもよいし、〈生、死〉などの二つの状態でもよい。要は互いに区別出来る有限個の状態であれば何でもよい。各セルは、各時刻に、複数の状態のうちの一つをとる。どの状態をとるかは、直前の自己の状態と、直前の自己の「近傍」のセルの状態とによって決まる。例えば、状態として〈生、死〉を考え、各セルの近傍とはそれを取巻く八つのセルのことだとしよう。状態がどう変るかを決める遷移規則としては、例えば、次の三つを採用しよう。

1．現在、近傍のセルのうち三個が〈生〉ならば、中心のセルは次の世代に〈生〉となる。
2．現在、近傍のセルのうち二個が〈生〉ならば、中心のセルは現在の状態を維持する。
3．それ以外の場合には、中心のセルは次の世代に〈死〉となる。

時刻０における初期状態として各セルの状態を適当に設定し、それらに遷移規則を適用すると、次の時刻１における各セルの状態が定まる。それらに再び遷移規則を適用して、次の時刻２の各セルの状態が定まる。<生>のセルは白で、<死>のセルは黒で表示することにすれば、時間の経過とともに、碁盤上には白の陣地と黒の陣地とが様々に入り乱れ、動いて行くであろう。

それがどのようなパターンを描くかは、初期状態と遷移規則とによって決まる。初期状態と遷移規則さえ与えられれば、それ以降の全ての状態は完全に「決定」されている。偶然の入る余地はどこにもない。しかし、或る時間経過後の状態を知ろうとすれば、初期状態から出発し、次々と、遷移規則を適用することにより、一つ一つのセルが〈生〉か〈死〉かを判定して行くより他に近道はない。

ところで、遷移規則を適用するには、近傍中〈生〉が幾つ、〈死〉が幾つと数えなければならないから、これも一種の「計算」であろう。とすれば、「計算」と系の現実の「展開」

とが同時並行的に行われていることになる。セル・オートマトンはまぎれもなく決定論の世界であるが、それがどう展開して行くかは実際に計算してみるより他に知る方法がない。計算することが即ち展開であるという事態がここに起っているのである。

自然界の物理的系においては系の展開と計算とが同時であるとは、このような事態を指している。展開と計算とは表裏一体であるから、展開と計算と、どちらが速いということはない。

自然の物理的系の展開＝計算と、それをシミュレートするコンピューターとでは、どちらが速いか遅いかということが問題になる。そして、それとは別に、系の展開した結果とシミュレーションで得られた結果とが一致するかどうかということも問題となる。コンピューターの方が早く、しかも、両者の結果が一致する場合にだけ、シミュレーションは「予測」たり得る。予測が可能なのは、日蝕などの特殊な現象に限られる。そうした現象は「線形」であるといわれる。その場合には、その数学的モデルにおいて、初期値に対する鋭敏性や計算過程における誤差の拡大という問題は生じない。ポアンカレの云うように、最初の状態をただ近似的に知り得るに過ぎなくても、その後の状態を同じ近似の度をもって予見し得るのである。近似の度が一定に保たれるということが線形ということに他ならない。非線形な現象の場合には、仮に、現実の展開よりも速く結果が得られたとしても、それは一般に、実際とは似ても似つかぬものとなる。初期値への鋭敏性や誤差の拡大がカオスを生むのである。

６．世界はどうなっているか

物理的系自体が計算を行っているとしても、初期値の精度や誤差の拡大が問題となるのは数学的モデルの側においてであるというのが今までの結論であった。それで、決定論や偶然性も、数学的モデルにおける問題だということになる（数式によって表現されるということが決定論である）。それでは、現実のこの世界はどうなっているのか。これを考察することで、小論の結びとしたい。

一般に「線形」、「非線形」の区別は、物理的系にも、また、それを写し取る数学的モデルにも適用される。線形とは、物理的系においては結果が原因に比例することであり、数学的モデルにおいては時間が経過しても近似の度が一定に保たれることであろう。一方、非線形とは、物理的系においては結果が原因に比例しないことであり、数学的モデルにおいては近似の度が一定に保たれずカオスの発生に至ることと考えられる。

このように物理的系においては、線形、非線形の区別は、結果が原因に比例するかどうかであるが、それは云い換えれば、フィードバック効果の有無ということである。フィードバック効果があれば、その系の進行自体がその進行を促進したり、阻害したりする。従って、その系においては結果が原因に比例せず、非線形性が出現する。

我々の身の回りには非線形な現象が満ちていることは最近では周知の事実である。それは、

いたるところでフィードバック効果が働いているということに他ならない。フィードバックとは、つまりは、自分の出力した値を自分自身の入力にするという操作を繰返すことである。系の展開自体がその系の未来を決めて行く。系の未来は予め決まっているわけでもなく、また、他の何かによって決まるわけでもない。そこには「決定論」もなく、「偶然」もない。（セル・オートマトンの場合には、展開と計算とが同時であっても、どう展開するかは遷移規則によって予め決定されている。）

自然はそれ全体が一つの系と考えられる。他から孤立した系などというものは、便宜上想定されたものに過ぎない。自然が全体で一つの系をなすのなら、それを「外」から決定しているものなど存在しない。自然界においては互いが互いを決定し合って展開して行く。決定論とか偶然性とかは、そうした自然全体から一部を切り出し、それを数学的にモデル化したときに発生する問題である。

以上はまた次のようにも考えられる。即ち、「線形」とは因果の「列」であり、「非線形」とは因果の「網」である、と。世界における何事かを説明しようとすれば、関係する出来事を線形に切り取って来て、一列に並べるほかないだろう。それが決定論であり、因果列である。切り取られた部分以外は無視する、しかし、ときとして、外部からの影響は避けられない。しかし、外部は因果の外としたのであるから、それは偶然である。

これに対して、因果が網だとする見方では、全てが全てに影響を及ぼし合い、そのことによって、網自体が時間とともに進展して行く。世界全体が一つのフィードバック・システムなのである。

注

1．Poincaré, H.（1908）邦訳75 - 6頁。
2．逆変換は「正方形の生地を上方向に二倍に引伸ばし、その上半分を下半分の右隣へ置く」という変換である。x、yを、x′、y′によって表すことが逆変換である。
3．このことは、数式を使って直接、証明出来る。初期位置の座標を二進法展開し、後は理論的にステップを追って行けばよい（後藤蔚（2008）69－70頁）。実際に計算する必要はない。従って、パイ捏ね変換によって齎されるランダム性は、計算による誤差の積み重ねによるものではない。
4．ここでいう精度とは二進法展開での精度である。この証明は、実質的に上記３の証明と同じである。
5．状態空間とは、力学系の瞬間的な状態がその中の一点で完全に決定されるような抽象的な空間のことである。１個の粒子についてその位置と運動量を表すのに夫々３個の座標を要するので、N個の粒子からなる力学系の状態空間は6N次元空間である。系の時間発展は状態空間内の軌道によって記述される。通常の３次元空間内におけるN個の粒子の

運動はN本の曲線を描くが、それは、6N次元状態空間における一本の軌道に対応する。ローレンツのモデルでは状態空間の次元はただの３つであり、X、Yは温度に関係し、Zは流速に関係する。

６.「カオス」という命名は、1975年に、T. Liとの共著論文中、J. A. Yorkeによって行われた。

引用文献

後藤蔚（2008）「偶然性について」、『大学院紀要（文学研究科）』第44集、東洋大学。

Poincaré, H.（1908）*Science et Méthode.* 吉田洋一訳（1953）『科学と方法』、岩波文庫。

The Philosophy of Non-linearity

GOTO, Shigeru

A physical system is one thing, and the mathematical model which traces it is another. Determinism and chance are matter of the latter.

Nature is one system as a whole, where everything influences each other. The following state of nature is determined only by such mutual action. There, output is next input. This repetition gives rise to non-linearity of the world. Nature has nothing to do with determinism and chance.

Key Words: determinism, forecast, chance, chaos, linearity, non-linearity, feedback.